Dipl.-Ing. Paul MOHR email: p.mohr@eduhi.at

Zentrales räumliches Kräftesystem

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Mechanik; Statik; zentrales räumliches Kräftesystem (ZRKS);
  Vektorrechnung; Lösen linearer Gleichungssysteme mittels Matrizenrechnung

- Kurzzusammenfassung

  Eine (resultierende) Kraft im Raum kann durch drei Pendelstützen oder Zugmittel, die ein räumliches zentrales Kräftesystem bilden, ins Gleichgewicht gebracht werden. Die Berechnung der unbekannten Kräfte mittels Vektor- und Matrizenrechnung ist der traditionellen Rückführung auf ebene Kräftesysteme an Eleganz und Mächtigkeit weit überlegen.

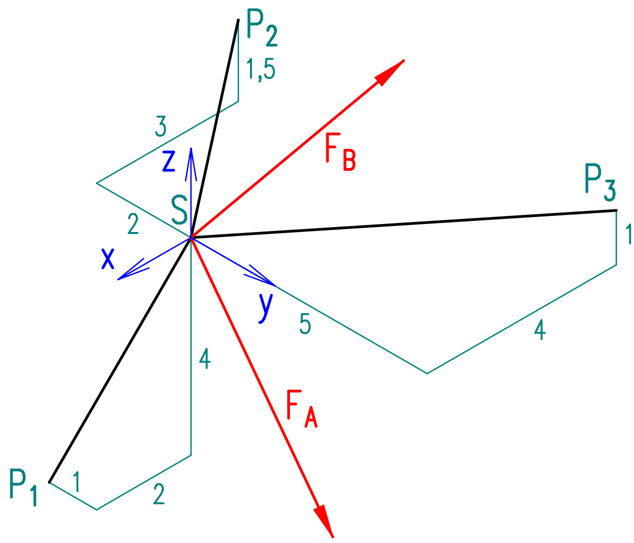
- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Mechanik / räumliche Kräftesysteme im 1. oder 2. Jg. der HTL;
  Vektorrechnung; Lösen linearer Gleichungssysteme mittels Matrizenrechnung

- Mathcad-Version:

  Mathcad 11

Berechnung der Stabkräfte einer Dreibeinstütze mittels Vektor- und Matrizenrechnung



In zentralen räumlichen Kräftesystemen ist es zweckmäßig, den Koordinatenursprung in den Schnittpunkt der Wirklinien der Kräfte zu legen (hier die Dreibeinspitze S).
In welche Richtung die x-, y- und z-Achse gelegt werden ist beliebig, solange sie ein "Rechtssystem" bilden.

Angaben

Ortsvektoren der Dreibeinpunkte

$$\mathbf{P_1} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} m \qquad \mathbf{P_2} := \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} m \qquad \mathbf{P_3} := \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} m$$

Kräfte an der Dreibeinspitze

$$\mathbf{F_A} := \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ -300 \end{pmatrix} N \qquad \mathbf{F_B} := \begin{pmatrix} -300 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} N$$

Resultierende

$$\mathbf{F_r} := \mathbf{F_A} + \mathbf{F_B} \qquad \mathbf{F_r} = \begin{pmatrix} -200 \\ 600 \\ -50 \end{pmatrix} N$$

Kraftrichtungs-Einheitsvektoren

Die Resultierende wird durch die drei Stabkräfte im Gleichgewicht gehalten, deren Wirklinien von der Dreibeinspitze zu den Fußpunkten P_1, P_2 und P_3 verlaufen.

Die Einheitsvektoren der drei Kraftrichtungen ergeben sich aus den Ortsvektoren der Dreibeinpunkte.

$$\mathbf{f_1} := \frac{\mathbf{P_1}}{|\mathbf{P_1}|} \qquad \mathbf{f_2} := \frac{\mathbf{P_2}}{|\mathbf{P_2}|} \qquad \mathbf{f_3} := \frac{\mathbf{P_3}}{|\mathbf{P_3}|}$$

Die Kraft eines Dreibeinstabes ist das Produkt aus dem zunächst unbekannten Betrag der Kraft und dem Richtungs-Einheitsvektor.

$$\mathbf{F_i} = F_i \cdot \mathbf{f_i}$$

Gleichungssystem des Kräftegleichgewichtes

Die Gleichgewichtsbedingung für die Dreibeinstütze lautet, dass die Summe aller Kräfte der Nullvektor sein muss

$$F_1 \cdot \mathbf{f_1} + F_2 \cdot \mathbf{f_2} + F_3 \cdot \mathbf{f_3} + \mathbf{F_r} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad F_1 \cdot \mathbf{f_1} + F_2 \cdot \mathbf{f_2} + F_3 \cdot \mathbf{f_3} = -\mathbf{F_r}$$

Es handelt sich also um ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten F_1, F_2 und F_3 , das am einfachsten mittels Matrizenrechnung gelöst wird.

Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} := \mathrm{erweitern}(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathbf{f_1} & \mathbf{f_2} & \mathbf{f_3} \end{array} & \text{Anteil in} \\ \mathbf{A} = & \begin{pmatrix} 0.44 & -0.77 & -0.62 \\ -0.22 & -0.51 & 0.77 \\ -0.87 & 0.38 & 0.15 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{x-Richtung} \\ \text{y-Richtung} \\ \text{z-Richtung} \end{array} \end{array}$$

Lösungsvektor

$$\mathbf{L} := \mathbf{A}^{-1} \cdot -\mathbf{F_r} \quad \text{oder gleich direkt} \quad \mathbf{L} := \mathrm{erweitern}\left(\frac{\mathbf{P_1}}{|\mathbf{P_1}|}, \frac{\mathbf{P_2}}{|\mathbf{P_2}|}, \frac{\mathbf{P_3}}{|\mathbf{P_3}|}\right)^{-1} \cdot -\mathbf{F_r}$$

Lösung und Probe

ORIGIN := 1 beginnt die Nummerierung von Matrizenelementen bei "1"

Stabkräfte

$F_1 := \mathbf{L}_1$ $\quad F_1 = -75.37\,\mathrm{N}$

$F_2 := \mathbf{L}_2$ $\quad F_2 = 220.95\,\mathrm{N}$

$F_3 := \mathbf{L}_3$ $\quad F_3 = -652.34\,\mathrm{N}$

Ein positiver Betrag bedeutet, dass der Stab auf Zug beansprucht wird, ein negativer, dass eine Druckbeanspruchung vorliegt.

Probe

$$\mathbf{F_1} := F_1 \cdot \mathbf{f_1} \qquad \mathbf{F_2} := F_2 \cdot \mathbf{f_2} \qquad \mathbf{F_3} := F_3 \cdot \mathbf{f_3}$$

$$\mathbf{F_1} = \begin{pmatrix} -32.89 \\ 16.45 \\ 65.79 \end{pmatrix}\mathrm{N} \qquad \mathbf{F_2} = \begin{pmatrix} -169.74 \\ -113.16 \\ 84.87 \end{pmatrix}\mathrm{N} \qquad \mathbf{F_3} = \begin{pmatrix} 402.63 \\ -503.29 \\ -100.66 \end{pmatrix}\mathrm{N}$$

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_r} = \begin{pmatrix} -0 \\ 0 \\ -0 \end{pmatrix}\mathrm{N}$$